Jochen Weber

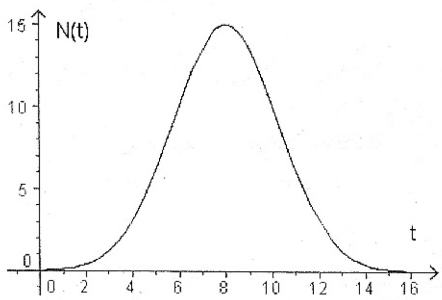
Aufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozesse

1.0 Die Geschwindigkeit v eines in einer bestimmten Flüssigkeit unter Reibungseinfluss fallenden Körpers kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten in Abhängigkeit von der Zeit t durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:
$v(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0{,}654 \cdot t})$ für $t \geq 0$.
Grundlage für die folgenden Teilaufgaben sind die bekannten physikalischen Zusammenhänge, dass die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitungsfunktion der Ortsfunktion und die Beschleunigungsfunktion die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeitsfunktion ist (Abitur 2003 AII).

1.1 Berechnen Sie v(0) und $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse in dem gegebenen Zusammenhang.

1.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem gilt: $v(t_1) = 9{,}0$.
(Ergebnis: $t_1 \approx 1{,}4$)

2.0 Untenstehendes Diagramm entspricht näherungsweise dem Verlauf einer lokal beschränkten Epidemie innerhalb einer Bevölkerung. Für die zeitliche Abhängigkeit der Anzahl der Erkrankten in Tausend gilt ohne Berücksichtigung der Einheiten die Gleichung $N(t) = 15 \cdot e^{-0{,}1 \cdot (t-8)^2}$, wobei t als Zeitangabe in Wochen zu interpretieren ist. Zunächst sind nur wenige Personen von der Krankheit betroffen, jedoch breitet sie sich wegen der hohen Ansteckungsgefahr schnell in der Bevölkerung aus. Wegen der anlaufenden Impfaktion und der Personen, die die Krankheit überstanden haben, steigt der Bevölkerungsanteil der gegen die Krankheit immunen Menschen. Dadurch sinkt der Anstieg der Neuerkrankungen und die Epidemie klingt ab (Abitur 2006 AI).



2.1 Berechnen Sie die Zeitspanne, in der sich die Anzahl der Krankheitsfälle bezogen auf das Ende der 1. Woche auf den dreifachen Wert vergrößert.

2.2 Die Epidemie gilt als überstanden, wenn wieder der Krankenstand wie zur Zeit t = 0 erreicht ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $G(t) = G_0 \cdot e^{kt}$ mit $t \in R \wedge t>0$, $G_0 \in R \wedge G_0 > 0$ und $k \in R$. G(t) beschreibt die exponentielle Zunahme bzw. Abnahme einer Anfangsmenge G_0 in Abhängigkeit von der Zeit t (Abitur 2006 AII).

3.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion G einen Wachstums- bzw. einen Abnahmeprozess beschreibt.

G(t) beschreibt im Folgenden für $t \in N$ die Anzahl der Geburten eines bestimmten Kalenderjahres in Deutschland. Im Jahr 2003 wurden $709{,}4 \cdot 10^3$ Geburten registriert. Aus den vorangegangenen Jahren ergibt sich für k der auch für die fraglichen Zeiträume der folgenden Teilaufgaben als konstant angenommene Wert k = -0,01213.

3.2 Erstellen Sie eine Prognose für die Anzahl der Geburten in Deutschland im Jahr 2020.

3.3 Berechnen Sie, in welchem Kalenderjahr die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert $650{,}0 \cdot 10^3$ unterschreiten wird.

4.0 Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12t)}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $\lambda < 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.
Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2015 AII)

4.1 Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $\lambda = -0{,}10$ und N_0 = 18.

4.2 Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht wird.

5.0 Seit Beginn des 20. Jahrhunderts führt der vom Menschen verursachte zusätzliche Ausstoß von Kohlendioxid (CO_2) zu einer Verstärkung des Treibhauseffektes, das heißt zu einem globalen Temperaturanstieg mit weitreichenden Folgen.
Nach einem mathematischen Modell soll die Entwicklung der weltweiten CO_2-Emissionen abgeschätzt werden. Dieses Modell lässt sich näherungsweise durch die mathematische Funktion $k: t \mapsto a \cdot t^2 \cdot e^{-b \cdot t} + 7$ mit $t, a, b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$ darstellen.
Dabei entspricht k(t) der CO_2-Emissionsrate in Mrd. Tonnen pro Jahr zum Zeitpunkt t, wobei t die seit Beginn des Jahres 1950 vergangene Zeit in Jahren beschreibt. Unter der CO_2-Emissionsrate wird dabei im Folgenden die ausgestoßene Masse an CO_2 pro Zeiteinheit verstanden. Auf das Mitführen von Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2016 AI)

5.1 Nach diesem Szenario lag die CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2000 bei genau 30 Mrd. Tonnen pro Jahr und zu Beginn des Jahres 2200 wird sie genau bei 17,5 Mrd. Tonnen CO_2 pro Jahr liegen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Angaben die Parameter a und b der Funktion k auf drei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt a = 0,025 und b = 0,020.
Alle folgenden Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

5.2 Bestimmen Sie die nach diesem Modell prognostizierte CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2017.

6.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit“ für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät.
Die Funktion G mit $G(t) = 20e^{-0,2t} + 70$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach t Monaten an. Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

6.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht G_{ideal}, das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll.

6.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer t_1 der Diät der Kunde nach diesem Plan 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird.

7.0 Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,033 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdoppelungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.

7.1 Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf.
Bestimmen Sie damit die Bevölkerungszahlen der Jahre 1990 und 2000.

7.2 In Europa beträgt die jährliche Wachstumsrate 0,35% und in Afrika 2,94%.
Vergleichen Sie die Verdoppelungszeiten.

8.0 Eine Bakterienkultur von 3800 Individuen wurde um 9.00 Uhr sich selbst überlassen. Um 13.00 Uhr umfasste sie bereits 31500 Bakterien.

8.1 Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion Zeit → Bakterienzahl auf.

8.2 Berechnen Sie den Bestand um 11.00 Uhr, 14.30 Uhr und 16.00 Uhr.

8.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem 12000 Bakterien vorhanden sind.

8.4 Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der sich die jeweils vorhandene Bakterienzahl verdoppelt.

8.5 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die ursprüngliche Bakterienzahl verdoppelt hat.

9.0 Wolfram 181 hat eine Halbwertszeit von 5,3 sec.
Im Augenblick sind 500 mg vorhanden.

9.1 Bestimmen Sie, wie viel Milligramm in einer Minute zerfallen sind.

9.2 Ermitteln Sie, wie viel Milligramm es vor zehn Sekunden waren.

10.0 Ein Körper mit einer Temperatur von 300°C wird zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur von 0°C gebracht.
Innerhalb einer Stunde sinkt die Temperatur jeweils auf 40% ihres Wertes zu Beginn dieser Stunde. Mit f(t) wird die Temperatur des Körpers nach t Stunden bezeichnet.

10.1 Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle.

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C						

10.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f(t) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(t).

10.3 Ermitteln Sie, wann die Temperatur auf 100°C abgesunken ist.

11.0 Der Luftdruck p wird in Hektopascal (hPa) gemessen. Aus Messungen ist bekannt, dass er exponentiell mit der Höhe abnimmt und zwar durchschnittlich um 12 % pro Kilometer Höhenzunahme.
An einem Beobachtungstag betrug der Luftdruck auf Meereshöhe 1000 hPa.

11.1 Geben Sie eine Funktion an, mit der man an diesem Tag für die Höhe h (in km) über dem Meeresspiegel den Luftdruck p (in hPa) berechnen kann.

11.2 Bestimmen Sie, wie groß der Luftdruck in 4500 m Höhe über dem Meeresspiegel war.

11.3 Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der Druck gegenüber dem Wert auf Meereshöhe abgenommen hat.

11.4 Berechnen Sie, in welcher Höhe ein Wetterballon einen Luftdruck von 400 hPa registriert hat.

12.0 Der Zerfall radioaktiver Kerne kann auch durch die Aktivität A(t) beschrieben werden. Sie gibt die Anzahl der radioaktiven Zerfälle pro Minute zu einem bestimmten Zeitpunkt t an. Für die Aktivität gilt: $A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ (t ist die Zeit in Jahren)

12.1 Das chemische Element Kohlenstoff besitzt das radioaktive Isotop ^{14}C. Dieses Isotop besitzt eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Das bedeutet, dass nach dieser Zeit die Aktivität auf die Hälfte des anfänglichen Wertes gesunken ist.
Berechnen Sie mithilfe dieser Angabe die Zerfallskonstante k.

12.2 Zur Altersbestimmung organischer Funde wird häufig die sogenannte „^{14}C-Methode“ angewandt. Dabei wird ausgenutzt, dass jeder lebende Organismus ^{14}C-Atome aus der Luft aufnimmt, wobei deren Anteil in der Luft über die Jahrtausende als konstant betrachtet wird. Sobald ein Organismus stirbt, endet die Aufnahme von ^{14}C-Atomen. Der in dem toten Organismus vorhandene Kohlenstoff ^{14}C zerfällt nach dem obigen Gesetz. Im Jahre 1947 wurden in einer zerfallenen Tempelruine am Toten Meer die berühmten „Qumran Papyrusrollen“ gefunden, die Aufschluss über die Authentizität des Alten Testaments gaben.
Die Untersuchung einer Probe dieser Papyrusrollen ergab, dass diese nur noch 79 % der Aktivität A_0 besaß, die an lebenden Organismen festzustellen ist.
Berechnen Sie, vor wie vielen Jahren ungefähr die Papyrusstauden geerntet wurden, die zur Herstellung der Qumran-Rollen verwendet wurden.

13.0 Das Wachstum einer Algenfläche auf einem See wird beschrieben durch die Funktion $f(t) = 5000 - 4000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$ (bedeckte Fläche in m^2 nach t Wochen).

13.1 Bestimmen Sie, wie groß die bedeckte Fläche zum Beginn der Beobachtung ist und welche Fläche durch die Algen langfristig bedeckt wird.

13.2 Ermitteln Sie, welche Fläche nach zwei Wochen bedeckt ist.

13.3 Bestimmen Sie, um wie viel m^2 die Algenfläche in der 3. Woche wächst.

13.4 Ermitteln Sie, nach welcher Zeit eine Fläche von $3000\,m^2$ durch die Algen bedeckt ist.

14.0 Nimmt man ein Glas mit einer Flüssigkeit aus dem Kühlschrank, so erwärmt sich die Flüssigkeit. Der Erwärmungsvorgang wird beschrieben durch
$f(t) = 20 - 15e^{-0,1\cdot t}$ ($t \geq 0$ in Minuten, $f(t)$ in °C).

14.1 Begründen Sie, dass sich die Temperatur der Flüssigkeit langfristig dem Wert 20°C nähert.

14.2 Berechnen Sie, auf welche Temperatur sich die Flüssigkeit innerhalb der ersten fünf Minuten erwärmt.

14.3 Ermitteln Sie, nach wie viel Minuten die Temperatur 17°C beträgt.

15.0 Eine Mäusepopulation in einem Keller wächst exponentiell an. Bei Beobachtungsbeginn sind acht Mäuse vorhanden, nach 10 Wochen sind es bereits 26 Tiere. Die Knappheit an Nahrung erlaubt es maximal 50 Mäusen dauerhaft im Keller zu überleben.

15.1 Begründen Sie, dass die Anzahl der Mäuse im Keller durch die Wachstumsfunktion $N(t) = 50 - 42 \cdot e^{-0,056\cdot t}$ (t in Wochen) beschrieben werden kann.

15.2 Ermitteln Sie, wie viele Mäuse nach fünf Wochen im Keller leben.

15.3 Bestimmen Sie, nach wie vielen Wochen der Bestand auf 40 Mäuse angewachsen ist.

16.0 Ein Anstreicher schüttet in einen Wassereimer ein Pulver, das sich zunächst am Boden absetzt. Nach 10 Minuten haben sich 100 g des Pulvers gelöst. Die Lösung ist bei 600 g gesättigt.
Die Menge des im Wasser gelösten Pulvers soll durch die Funktion $N(t) = A - B \cdot e^{-k\cdot t}$ (t In Minuten und N(t) in Gramm) beschrieben werden.

16.1 Bestimmen Sie die Werte der Konstanten A, B und k.

16.2 Ermitteln Sie, nach welcher Zeit 90 % der Maximalmenge gelöst sind.

Lösungen

1.1

$v(0)=15\cdot(1-e^{-0,654\cdot 0})=0$

$\lim\limits_{t\to\infty}(15\cdot(1-e^{-0,654\cdot t}))=15$

Die Maßzahl der Geschwindigkeit nähert sich für große Werte t dem Wert 15 asymptotisch an.

1.2

$$v(t)=9 \Rightarrow 15\cdot(1-e^{-0,654\cdot t})=9 \Rightarrow 1-e^{-0,654\cdot t}=\frac{3}{5} \Rightarrow e^{-0,654\cdot t}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow -0,654\cdot t=\ln\frac{2}{5} \Rightarrow t=\frac{\ln\frac{2}{5}}{-0,654}\approx 1,40$$

2.1

$N(1)=15\cdot e^{-0,1\cdot(1-8)^2}\approx 0,112$ (112 Erkrankte)

$\Rightarrow 3\cdot 0,112=15\cdot e^{-0,1\cdot(t-8)^2} \Rightarrow 15\cdot e^{-0,1\cdot(t-8)^2}=0,336 \Rightarrow e^{-0,1\cdot(t-8)^2}=0,0224$

$$\Rightarrow -0,1\cdot(t-8)^2=\ln 0,0224 \Rightarrow (t-8)^2=\frac{\ln 0,0224}{-0,1}=37,99$$

$\Rightarrow t-8=\pm 6,16 \quad \Rightarrow (t_1=14,16) \quad t_2=1,84$

$\Rightarrow$ die Zeitspanne beträgt 0,84 Wochen;

2.2

$N(0)=15\cdot e^{-0,1\cdot(0-8)^2}=15\cdot e^{-6,4}\approx 0,025$

$\Rightarrow 15\cdot e^{-0,1\cdot(t-8)^2}=0,025 \Rightarrow e^{-0,1\cdot(t-8)^2}=0,0017 \Rightarrow -0,1\cdot(t-8)^2=\ln 0,0017$

$$\Rightarrow (t-8)^2=\frac{\ln 0,0017}{-0,1}\approx 63,77 \Rightarrow t-8=\pm 8 \Rightarrow (t_1=0) \quad t_2=16$$

$\Rightarrow$ Die Epidemie ist nach 16 Wochen vorüber;

3.1

$G(t)=G_0\cdot e^{k\cdot t} \quad t\in R\wedge t>0;\ G_0\in R\wedge G_0>0; k\in R$

$k>0$: Wachstumsprozess

$k<0$: Abnahmeprozess

3.2 $G(17)=709,4\cdot 10^3\cdot e^{-0,01213\cdot 17}\approx 577,2\cdot 10^3$

3.3

$709{,}4\cdot 10^3\cdot e^{-0{,}01213\cdot t_1}=650\cdot 10^3 \quad \Rightarrow e^{-0{,}01213\cdot t_1}=0{,}91627 \quad \Rightarrow -0{,}001213\cdot t_1=\ln 0{,}91627$

$\Rightarrow t_1=\dfrac{\ln 0{,}91627}{-0{,}01213}\approx 7{,}21 \quad \Rightarrow t_1=8 \text{ (da } t\in \mathbb{N})$

Im Jahr 2011 wird die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert $650\cdot 10^3$ unterschreiten

4.1

$N(1)=3\cdot N_0 \quad \Rightarrow N_0\cdot e^{\lambda(-11)}=3\cdot N_0 \quad \Rightarrow e^{\lambda(-11)}=3 \quad \Rightarrow -11\lambda=\ln 3$

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{\ln 3}{-11}\approx -0{,}10$

$N(2)=133 \quad \Rightarrow N_0\cdot e^{-0{,}10\cdot(-20)}=133 \quad \Rightarrow N_0=\dfrac{133}{e^2}\approx 18$

4.2

$18e^{-0{,}1(t^2-12t)}\geq 540 \quad \Rightarrow e^{-0{,}1(t^2-12t)}\geq 30 \quad \Rightarrow -0{,}1(t^2-12t)\geq \ln(30)$

$\Rightarrow t^2-12t\leq \dfrac{\ln(30)}{-0{,}1} \quad \Rightarrow t^2-12t+34{,}01\leq 0$

$\Rightarrow t^2-12t+34{,}01=0 \quad \Rightarrow t_1\approx 7{,}41 \quad t_2\approx 4{,}59$

Skizze von $(t^2-12t+34{,}01)$:

$\Rightarrow$ erstmaliger Zeitpunkt $t_0\approx 4{,}59$

5.1

(I) $k(50)=30 \quad \Rightarrow 2500a\cdot e^{-50b}=23 \quad \Rightarrow a=\dfrac{23\cdot e^{50b}}{2500}$

(II) $k(250)=17{,}5 \quad \Rightarrow 62500a\cdot e^{-250b}=10{,}5$

(II) $\Rightarrow 62500\cdot\dfrac{23\cdot e^{50b}}{2500}\cdot e^{-250b}=10{,}5 \quad \Rightarrow 575\cdot e^{-200b}=10{,}5$

$\Rightarrow e^{-200b}=\dfrac{21}{1150} \quad \Rightarrow -200b=\ln\left(\dfrac{21}{1150}\right) \quad \Rightarrow b=\dfrac{\ln\left(\dfrac{21}{1150}\right)}{-200}\approx 0{,}020$

$\Rightarrow a=\dfrac{23\cdot e^{50\cdot 0{,}020}}{2500}\approx 0{,}025$

5.2

$k(67)=0{,}025\cdot 67^2\cdot e^{-0{,}020\cdot 67}+7\approx 36{,}4$

Die CO_2-Emissionsrate beträgt zu Beginn des Jahres 2017 36,4 Mrd. Tonnen pro Jahr.

6.1

$G(0)=20\cdot e^{-0,2\cdot 0}+70=20+70=90$

Zu Beginn der Diät hat der Kunde 90 kg

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(20\cdot e^{-0,2t}+70\right)=70$

Nach sehr langer Anwendung der Diät soll der Kunde ein Idealgewicht von 70 kg erreichen.

6.2

Angestrebte Gewichtsreduzierung: 20 kg 75% von 20 kg = 15 kg

$20\cdot e^{-0,2\cdot t_1}+70=75 \quad \Rightarrow e^{-0,2\cdot t_1}=0,25 \quad \Rightarrow t_1=\frac{\ln(0,25)}{-0,2}\approx 6,93$

Nach knapp 7 Monaten sind 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreicht.

7.1

$f(t)=a\cdot b^t$

$f(0)=4,033\cdot 10^9 \quad \Rightarrow a=4,033\cdot 10^9$

$f(40)=2\cdot 4,033\cdot 10^9=8,066\cdot 10^9 \quad \Rightarrow 8,066\cdot 10^9=4,033\cdot 10^9\cdot b^{40}$

$\Rightarrow b^{40}=2 \quad \Rightarrow b=\sqrt[40]{2}\approx 1,01748$

$\Rightarrow f(t)=4,033\cdot 10^9\cdot 1,01748^t$

Bevölkerungszahl 1990: $f(15)\approx 5,23\cdot 10^9$

Bevölkerungszahl 2000: $f(25)\approx 6,22\cdot 10^9$

7.2

Europa: $f(t)=a\cdot 1,0035^t \quad \Rightarrow 2a=a\cdot 1,0035^t$

$\Rightarrow 1,0035^t=2 \Rightarrow t_E=\frac{\lg 2}{\lg 1,0035}\approx 198$ Jahre

Afrika: $f(t)=a\cdot 1,0294^t \quad \Rightarrow 2a=a\cdot 1,0294^t$

$\Rightarrow 1,0294^t=2 \Rightarrow t_A=\frac{\lg 2}{\lg 1,0294}\approx 24$ Jahre

$\Rightarrow t_E\approx 8,25\cdot t_A$

8.1

$f(t)=a\cdot b^t$

$f(0)=3800 \quad \Rightarrow a=3800$

$f(4)=31500 \quad \Rightarrow 31500=3800\cdot b^4 \quad \Rightarrow b^4=8\frac{11}{38} \quad \Rightarrow b=\sqrt[4]{8\frac{11}{38}}\approx 1,6968$

$\Rightarrow f(t)=3800\cdot 1,6968^t$

8.2 $f(2)\approx 10941 \quad f(5,5)\approx 69623 \quad f(7)\approx 153886$

8.3

$$12000 = 3800 \cdot 1{,}6968^t \quad \Rightarrow 1{,}6968^t = 3\frac{3}{19}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\lg(3\frac{3}{19})}{\lg 1{,}6968} \approx 2{,}17\text{h} \Rightarrow 11.28 \text{ Uhr}$$

8.4 $1{,}6968^t = 2 \quad \Rightarrow t = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}6968} \approx 1{,}31\text{h}$

8.5 1,31h $\Rightarrow$ 1 h 19 min $\Rightarrow$ der Anfangsbestand hat sich um ca. 10.19 Uhr verdoppelt

9.1

$$b^{5,3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \sqrt[5,3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}8774 \quad \Rightarrow f(t) = 500 \cdot 0{,}8774^t$$

$\Rightarrow$ nach einer Minute (60 sec) noch übrig: $500 \cdot 0{,}8774^{60} \approx 0{,}195$

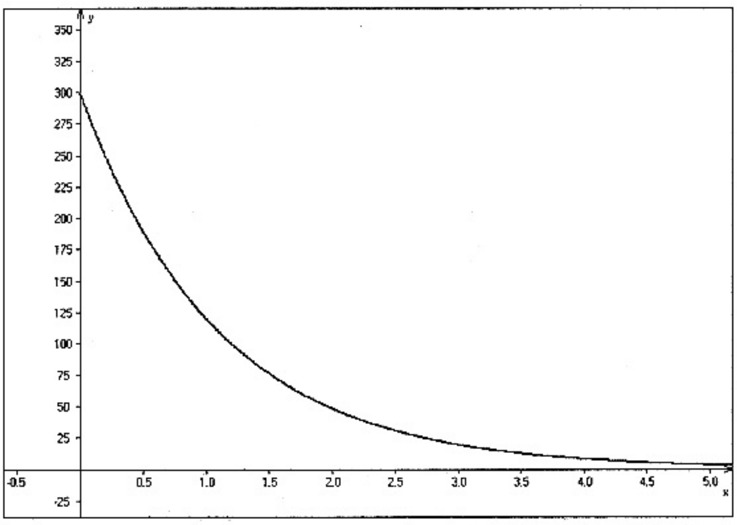
$\Rightarrow$ also sind 500 mg - 0,195 mg = 499,805 mg zerfallen

9.2 $a \cdot 0{,}8774^{10} = 500 \quad \Rightarrow a = \dfrac{500}{0{,}8774^{10}} \approx 1849{,}24\,\text{mg}$

10.1

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C	300	120	48	19,2	7,68	3,072

10.2 $f(t) = 300 \cdot 0{,}4^t$



10.3 $100 = 300 \cdot 0{,}4^t \quad \Rightarrow 0{,}4^t = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow t = \dfrac{\lg(\frac{1}{3})}{\lg 0{,}4} \approx 1{,}199\text{h} \ (1\text{h}\,12\,\text{min})$

11.1 $p(h) = 1000 \cdot (1-0{,}12)^h = 1000 \cdot 0{,}88^h$

11.2 $p(4{,}5) = 1000 \cdot 0{,}88^{4{,}5} \approx 562{,}56\,\text{hPa}$

11.3 $\frac{562{,}56}{1000} = 0{,}5626 \quad \Rightarrow$ Der Luftdruck hat um 43,74% abgenommen.

11.4 $400 = 1000 \cdot 0{,}88^h \quad \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}88^h \quad \Rightarrow h = \log_{0{,}88}(0{,}4) \approx 7{,}17\,\text{km}$

12.1 $\frac{1}{2} \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{-k \cdot 5730} \quad \Rightarrow e^{-k \cdot 5730} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow -k \cdot 5730 = \ln(0{,}5) \quad \Rightarrow k = -\frac{\ln(0{,}5)}{5730} \approx 0{,}000121$

12.2

$$0{,}79 \cdot A_0 = A_0 \cdot e^{-0{,}000121 \cdot t} \quad \Rightarrow 0{,}79 = e^{-0{,}000121 \cdot t}$$

$$\Rightarrow -0{,}00021t = \ln(0{,}79) \quad \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}79)}{-0{,}000121} \approx 1948{,}12 \text{ Jahre}$$

13.1

$$f(0) = 5000 - 4000 \cdot e^0 = 1000\,\text{m}^2$$

$$\lim_{t \to \infty}\left(5000 - 4000 \cdot \underbrace{e^{-0{,}08 \cdot t}}_{\to 0^+}\right) = 5000$$

Langfristig wird von den Algen eine Fläche von $5000\,\text{m}^2$ bedeckt.

13.2 $f(2) = 5000 - 4000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 2} \approx 1591{,}42\,\text{m}^2$

13.3

$$f(3) = 5000 - 4000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 3} \approx 1853{,}49\,\text{m}^2$$

Änderung in der dritten Woche: $1853{,}49 - 1591{,}42 = 262{,}07\,\text{m}^2$

13.4

$$3000 = 5000 - 4000 \cdot e^{-0{,}08t} \quad \Rightarrow -2000 = -4000 \cdot e^{-0{,}08t} \quad \Rightarrow e^{-0{,}08t} = 0{,}5$$

$$\Rightarrow -0{,}08t = \ln(0{,}5) \quad \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}08} \approx 8{,}66 \text{ Wochen}$$

14.1

$$\lim_{t \to \infty}\left(20 - 15 \cdot \underbrace{e^{-0{,}1 \cdot t}}_{\to 0^+}\right) = 20$$

Langfristig nähert sich die Temperatur der Flüssigkeit 20°C.

14.2 $f(5) = 20 - 15 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 5} \approx 10{,}90\,°\text{C}$

14.3

$$17=20-15\cdot e^{-0,1\cdot t}\quad\Rightarrow -15\cdot e^{-0,1\cdot t}=-3\quad\Rightarrow e^{-0,1\cdot t}=0,2$$

$$\Rightarrow -0,1t=\ln(0,2)\quad\Rightarrow t=\frac{\ln(0,2)}{-0,1}\approx 16,09\text{ Minuten}$$

15.1 $N(0)=50-42\cdot e^{0}=8\qquad \lim\limits_{t\to\infty}\left(50-42\cdot\underbrace{e^{-0,056\cdot t}}_{\to 0^{+}}\right)=50$

15.2

$N(5)=50-42\cdot e^{-0,056\cdot 5}\approx 18,26$

$\Rightarrow$ Nach fünf Wochen leben etwa 18 Mäuse im Keller.

15.3

$$40=50-42\cdot e^{-0,056\cdot t}\quad\Rightarrow -42\cdot e^{-0,056\cdot t}=-10\quad\Rightarrow e^{-0,056\cdot t}=\frac{10}{42}$$

$$\Rightarrow -0,056t=\ln\left(\frac{10}{42}\right)\quad\Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{10}{42}\right)}{-0,056}\approx 25,63$$

Nach etwa 26 Tagen ist der Bestand der Mäuse auf 40 angewachsen.

16.1

$A=600$

$N(0)=0\quad\Rightarrow A-B\cdot e^{0}=0\quad\Rightarrow A-B=0\quad\Rightarrow B=A=600$

$$N(10)=100\quad\Rightarrow 600-600\cdot e^{-k\cdot 10}=100\quad\Rightarrow -600\cdot e^{-k\cdot 10}=-500\quad\Rightarrow e^{-k\cdot 10}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow -10k=\ln\left(\frac{5}{6}\right)\quad\Rightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{-10}\approx 0,018$$

16.2

$$0,9\cdot 600=600-600\cdot e^{-0,018\cdot t}\quad\Rightarrow -600\cdot e^{-0,018\cdot t}=-60\quad\Rightarrow e^{-0,018\cdot t}=0,1$$

$$\Rightarrow -0,018t=\ln(0,1)\quad\Rightarrow t=\frac{\ln(0,1)}{-0,018}\approx 127,92\text{ Minuten}$$